۱-۳: تانسورها Tensors

تانسور، کمّیتی است که مؤلفه‌های آن به دستگاه مختصات وابسته است و از یک قاعده‌ی خاص پیروی می‌کند. حاصل ضرب دوتایی (dyadic) دو بردار، یک تانسور می‌شود.

Dyadic product:

symbolic $\vec{a}\circ\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}$

indicial $\vec{a}\circ\vec{b}=(a_i\hat{e}_i)\circ(b_j\hat{e}_j)=a_ib_j\,(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j)$

تانسور مرتبه‌ی دو همانند ماتریس مربّعی، یک تبدیل خطّی است؛ یعنی هر بردار را به بردار دیگری تبدیل می‌کند.

$\tilde{T}\vec{a}=\vec{b}\ \rightarrow\ \tilde{T}a_j\hat{e}_j=b_j\hat{e}_j\quad\rightarrow\quad\hat{e}_i\cdot\left(\tilde{T}a_j\hat{e}_j\right)=b_j\left(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\right)=\delta_{ij}b_j$

$\left(\hat{e}_i\cdot\tilde{T}\hat{e}_j\right)a_j=b_i\ \Rightarrow\ T_{ij}a_j=b_i\ \ \&\ T_{ij}=\hat{e}_i\cdot\tilde{T}\hat{e}_j$

$\tilde{T}\vec{a}=\vec{b}$ symbolic $\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\T_{21} & T_{22} & T_{23}\\T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ indicial $T_{ij}a_j=b_i$

vector $\begin{cases}\vec{a}=a_i\hat{e}_i\\a_i=\hat{e}_i\cdot\vec{a}\end{cases}$ & *tensor* $\begin{cases}\tilde{T}=T_{ij}\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\\T_{ij}=\hat{e}_i\cdot\tilde{T}\hat{e}_j\\\tilde{T}\hat{e}_j=T_{ij}\hat{e}_i\end{cases}$

$[\hat{e}_1\circ\hat{e}_1]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $[\hat{e}_2\circ\hat{e}_3]=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $[\hat{e}_3\circ\hat{e}_1]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$\tilde{T}=T_{ij}\hat{e}_i\circ\hat{e}_j=T_{11}\hat{e}_1\circ\hat{e}_1+T_{12}\hat{e}_1\circ\hat{e}_2+\cdots+T_{33}\hat{e}_3\circ\hat{e}_3=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\T_{21} & T_{22} & T_{23}\\T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_ib_j\,\hat{e}_i\circ\hat{e}_j$$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{b}\circ\vec{a}=\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)^T\neq\vec{a}\circ\vec{b}$

$$\lambda\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\circ\vec{b}=\vec{a}\circ\left(\lambda\vec{b}\right)$$
$$\vec{a}\circ\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)=\vec{a}\circ\vec{b}\pm\vec{a}\circ\vec{c}$$
$$\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)\circ\vec{c}=\vec{a}\circ\vec{c}\pm\vec{b}\circ\vec{c}$$

مثال: مطلوبست حاصل عبارت‌های زیر:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$

2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

3) $\vec{a}\circ\vec{a}=?$

مثال: رابطه‌ی زیر را اثبات کنید.

$$\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\ \ or\ \ \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

حلّ:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}&=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1c_1+a_1b_2c_2+a_1b_3c_3\\ a_2b_1c_1+a_2b_2c_2+a_2b_3c_3\\ a_3b_1c_1+a_3b_2c_2+a_3b_3c_3\end{bmatrix}\\ &=\left(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\right)a_1\hat{e}_1+\left(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\right)a_2\hat{e}_2+\left(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\right)a_3\hat{e}_3\\ &=\left(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\right)\left(a_1\hat{e}_1+a_2\hat{e}_2+a_3\hat{e}_3\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\end{aligned}$$

با توجه با تساوی بالا:

$$\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}=a_ib_j\left(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)\vec{c}=\left(b_jc_j\right)a_i\hat{e}_i=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$$
$$\Rightarrow\left(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)\vec{c}=c_j\hat{e}_i$$

$$\left(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)\hat{e}_k=\delta_{jk}\hat{e}_i\quad\&\quad\left(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)\vec{c}=c_j\hat{e}_i\quad\&\quad\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$$

خواص تانسورها:

$$\tilde{A}=\tilde{B}\ \Rightarrow\ A_{ij}=B_{ij}$$
$$\left(\tilde{A}\pm\tilde{B}\right)=\left(\tilde{A}\right)\pm\left(\tilde{B}\right)\ \Rightarrow\ \left(\tilde{A}\pm\tilde{B}\right)_{ij}=A_{ij}\pm B_{ij}$$

$$\tilde{T}=T_{ij}\hat{e}_i\circ\hat{e}_j \;\rightarrow\; \det\tilde{T}=\begin{cases}-1 & \textit{reflection}\\ +1 & \textit{rotation}\end{cases}$$

<u>Tensor product</u>:

$$\tilde{A}\tilde{B}\neq\tilde{B}\tilde{A}\;\Rightarrow\;\left[\tilde{A}\tilde{B}\right]=\left[\tilde{A}\right]\left[\tilde{B}\right]\neq\left[\tilde{B}\right]\left[\tilde{A}\right]$$

$$\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\vec{a}=\tilde{A}\left(\tilde{B}\vec{a}\right)\neq\tilde{B}\left(\tilde{A}\vec{a}\right)$$

$$\left(\tilde{A}\pm\tilde{B}\right)\vec{a}=\tilde{A}\vec{a}\pm\tilde{B}\vec{a}$$

$$\tilde{A}\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)=\tilde{A}\vec{a}\pm\tilde{A}\vec{b}$$

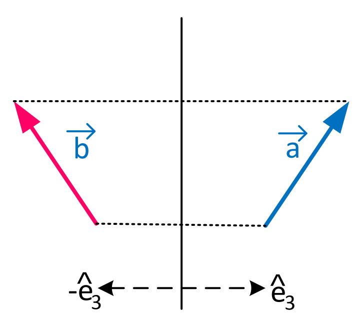
$$\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)_{ij}=\hat{e}_i\cdot\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\hat{e}_j=\hat{e}_i\cdot\tilde{A}\left(\tilde{B}\hat{e}_j\right)=\hat{e}_i\cdot\tilde{A}\left(B_{mj}\hat{e}_m\right)=\left(\hat{e}_i\cdot\tilde{A}\hat{e}_m\right)B_{mj}=A_{im}B_{mj}$$

$$\boxed{\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)_{ij}=A_{im}B_{mj}}$$

$$\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)_{ij}=A_{im}B_{mj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+A_{i3}B_{3j}$$

مثال: اگر تانسور $\tilde{T}$ هر بردار را به تصویر آینه‌ای آن نسبت به یک صفحه‌ی ثابت تبدیل کند، ماتریس تانسور $\tilde{T}$ را به‌دست آورید.

<u>حلّ</u>: تمام مؤلفه‌ها و اندازه‌ی دو بردار با هم برابرند.



$b_i=a_i$

$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|$

$\vec{b}\neq\vec{a}$

$$\tilde{T}\vec{a}=\vec{b}\;\rightarrow\;\tilde{T}a_j\hat{e}_j=b_j\hat{e}_j\;\rightarrow\;\tilde{T}\hat{e}_j=\hat{e}_j=T_{ij}\hat{e}_i$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}\hat{e}_1&=\hat{e}_1=T_{11}\hat{e}_1+T_{21}\hat{e}_2+T_{31}\hat{e}_3\\ \tilde{T}\hat{e}_2&=\hat{e}_2=T_{12}\hat{e}_1+T_{22}\hat{e}_2+T_{32}\hat{e}_3\\ \tilde{T}\hat{e}_3&=-\hat{e}_3=T_{13}\hat{e}_1+T_{23}\hat{e}_2+T_{33}\hat{e}_3\end{aligned}\qquad \tilde{T}=\left[T_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \det\tilde{T}=-1\quad \textit{reflection}$$